I. S. F. A. 2008-2009

Concours d'Entrée

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice non autorisée

EXERCICE I

Soit $R[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Soit $R^n[X]$ le sous espace de $R[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à *n*.

Soit *T* l'endomorphisme de $R[X]$ qui à tout polynôme *P* de $R[X]$ associe le polynôme *T(P)* défini par :

$$T(P) = (8 + 3X)P - (5X - X^2)P' + (X^2 - X^3)P''$$

où P' *et* P'' désignent les polynômes dérivées première et seconde de *P*.

1- Déterminer les valeurs de l'entier *n* pour lesquels $R^n[X]$ est stable par *T*.

2- Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de *T*.

3- *T* est il un endomorphisme injectif ?

EXERCICE II

Soit $\{v_n, n \in N\}$ la suite définie par le premier terme v_0 $(v_0 > 0)$ et la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{2(1+\sqrt{1+v_n})}$$

1- Etudier la convergence de la suite $\{v_n, n \in N\}$ et donner son éventuelle limite.

2- Soit *x→f (x)* une fonction définie pour *x* positif ou nul par : $f(x) = \frac{x}{2(1+\sqrt{1+x})}$.

Montrer que pour *x>0* la relation :

$$\frac{2f(x)}{\sqrt{f(x)(f(x)+1)}} = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$$

On introduit la suite $w_n = \int_0^{v_n} \frac{dt}{\sqrt{t(t+1)}}$. Montrer la relation $2w_{n+1} = w_n$

Donner l'expression de w_n en fonction de *n* et de v_0 .

En déduire un équivalent de v_n quand *n* tends vers $+\infty$.

Indication :

On pourra remarquer que la fonction $ln(\sqrt{t} + \sqrt{t+1})$ *a pour dérivée la fonction* $\frac{1}{\sqrt{t(t+1)}}$.

PROBLEME

L'objet de ce problème est de s'intéresser à résoudre dans certains cas l'équation fonctionnelle suivante :

$$f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt = g(x) \quad (1)$$

où *f* est une fonction inconnue supposée continue sur **R** ensemble des nombres réels et *g* une fonction donnée définie sur **R**

On rappelle que la fonction sh est définie par $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *et la fonction ch par* $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

A- Dans cette partie on suppose que la fonction g est deux fois dérivable sur R ensemble des réels :

1°) Montrer que les fonctions *f* solutions de (1) sont elles aussi deux fois dérivables et qu'elles vérifient :

$$f''(x) - f(x) = g(x)\ . \quad (2)$$

Rappel : Les solutions de (2) sont de la forme $Ae^x + Be^{-x}$ *quand g'' est la fonction nulle.*

En déduire la solution de l'équation (1) quand :

g est la fonction nulle

g est une constante

g est un polynôme de degré 1.

Déduire aussi que l'équation (1) (que *g* soit dérivable ou pas) a au plus une solution.

2°) Montrer qu'il existe une solution *f* de (2) de la forme :

$$f(x) = \frac{e^x}{2}\left[\int_0^x e^{-t} g''(t)dt + k_A\right] - \frac{e^{-x}}{2}\left[\int_0^x e^t g''(t)dt + k_B\right]$$

Montrer que si la fonction *f* écrite ci-dessus vérifie les relations :

$$f(0) = g(0) \quad \text{et} \quad f'(0) = g'(0)$$

alors *f* est solution de (1)

Expliciter la solution *f* de (1) quand la fonction *g* est la fonction exponentielle ($g(x) = e^x$) .

B- **Dans cette partie on suppose que la fonction g est seulement continue :**

1°) On note *E* l'ensemble des fonctions continues de **R** dans **R**.

2°) On définit l'application *A* qui à une fonction de *E* associe la fonction (notée *A(f)*) par la relation :

$$A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

Montrer que l'application *A* est une application de *E* dans *E* injective.

3°) On désigne par A_n la n[ième] itéré de l'application *A* :

$$A_2(f) = A(A(f)),\ldots, A_n(f) = A(A_{n-1}(f))$$

Montrer que $A_2(f) = \int_0^x \frac{1}{3!}(x-t)^3 f(t)dt$.

Généraliser ce résultat à $A_n(f)$. Justifier votre réponse.

4° On pose $U_n = A + A_2 + \cdots . + A_n$

Soit $U : f \to U(f)$: l'application de E dans E définie par :

$$U(f)(x) = \int_0^x sh(x-t)f(t)dt$$

Montrer que pour tout u on a :

$$\left|sh(u) - \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| \leq \frac{ch(u)|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

En déduire que pour tout réel x

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leq \frac{ch(x)|x|^{2n}}{2n!}\left|\int_0^x |f(t)|dt\right|$$

Montrer les égalités $U°A = A°U = U - A$

5°- Soit $I : f \rightarrow f$ l'application identité de E dans E. Montrer que les applications I-A et I+U sont (pour la composition des applications) des bijections de E dans E réciproques l'une de l'autre

En déduire la fonction de E solution de l'équation (1).

Explicite f pour la fonction g paire et telle que g est égale à :

$$g(x) = \left[\begin{array}{c} x \ pour\ x \in [0,1[\\ 2 - x\ pour\ x \in [1,2[\\ 0\ pour\ x \geq 2 \end{array}\right.$$
